

Correction des exercices

Exercice 1

On étudie le signe de $V_{n+1} - V_n$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \\ &= \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1, n(n+1) > 0$. Ainsi, $V_{n+1} - V_n$ est du signe de $n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)$.

On étudie deux cas :

- Si (u_n) est croissante alors :

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^n u_k \leq n u_{n+1}$

$$\text{donc } V_{n+1} - V_n \geq 0$$

La suite (V_n) est alors elle aussi croissante.

- Si (u_n) est décroissante alors :

$$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^n u_k \geq n u_{n+1}$

$$\text{donc } V_{n+1} - V_n \leq 0$$

La suite (V_n) est alors elle aussi décroissante.

Remarque ; si (u_n) est constante, il existe un réel m tel que $u_n = m$ quel que soit n . La suite (V_n) est alors également constante, tous ses termes sont égaux à m .

Exercice 2

Les termes de cette suite sont strictement positifs.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

A n fixé, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc $n^n \leq (n+1)^n$

$\forall n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est par

conséquent strictement décroissante.

Exercice 3

La stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ implique que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(n^2+1) > \ln n^2$

Par ailleurs, $\sin \sqrt{n} \geq -1$ quel que soit n .

On déduit que : $\forall n \geq 1$, $v_n \geq 2 \ln(n) - \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(n) - \frac{1}{2} = +\infty$$

D'après le théorème 1, on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \dots \times \frac{2}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k}$$

$$\forall k \geq 3, \quad \frac{2}{k} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{2^n}{n!} \leq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$$

D'après la proposition 3, on aura $l \leq 0$

Les termes de (u_n) sont positifs, donc $l \geq 0$.

Conclusion = $l = 0$.

Exercice 5

Chacun des n termes de la somme peut être encodé par des termes indépendants de k .

En effet $\forall 1 \leq k \leq n$, $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$

D'où
$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'où
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

or
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 6

1. un exemple de suite convergente non monotone

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$$

2. un exemple de suite bornée divergente

$$v_n = (-1)^n \quad (n \geq 0)$$

3. un exemple de suite non bornée qui ne tend pas vers $\pm$

$$w_n = n \times \cos(n\pi) \quad (n \geq 0)$$

Exercice 7

1)
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

2) Montrons que la suite (u_n) est majorée.

$$\forall k \geq 2, \quad k^2 \geq k(k-1)$$

Donc
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

En sommant les membres de cette inégalité, on obtient =

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^m \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\text{or } \sum_{k=2}^m \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

$$= 1 - \frac{1}{m} \quad (\text{une telle somme est appelée somme télescopique})$$

Ainsi $u_m \leq 2 - \frac{1}{m}$

D'où $u_m \leq 2$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

Conclusion = (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle converge d'après le théorème 3.

Exercice 8

1) $S_{2m} - S_m = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k}$

$\forall 1+m \leq k \leq 2m, \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2m}$

Donc $\sum_{k=1+m}^{2m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2m}$

Doit $S_{2m} - S_m \geq \frac{1}{2}$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que (S_m) converge vers une limite finie l .

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (S_{2m} - S_m) = l - l = 0$$

ce qui contredit l'inégalité précédente.

Si (S_m) était majorée alors (S_m) serait une suite croissante (ce qui se justifie facilement...) et majorée.

Elle serait par conséquent convergente. Nous venons de prouver que ce n'est pas le cas.

Alors, (S_n) est une suite croissante non majorée
 donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 9

$$1) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \quad \left(x \mapsto \ln x \text{ est une primitive de } \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \right)$$

or, si $n < x < n+1$, on a:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n} \quad \text{d'où} \\ \frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n} \quad ([n; n+1] \text{ est un intervalle de longueur 1})$$

ce qui établit la stricte décroissance de (u_n) .

2) De l'inégalité qui précède, on déduit que =
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$

En sommant de 1 à n , il vient:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$\text{D'où} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1)$$

Puis =

$$u_n > \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

Conclusion = (u_n) est minorée par 0.

3) (u_n) est une suite décroissante et minorée.

D'après le théorème 3, (u_n) est convergente.

Exercice 10

On a établi à l'exercice précédent que (u_n) est décroissante.

De même, on montre que (v_n) est croissante.

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

On a ainsi prouvé que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et on a :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$$

Exercice 11

1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (a_n) est croissante.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!(n+1)n} < 0 \end{aligned}$$

donc (b_n) est décroissante.

$$2) \quad b_n - a_n = \frac{1}{n!n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!n} = 0$$

3) (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.
Elles convergent donc vers le même réel.

4) Si e était un nombre rationnel, il s'écrirait :

$e = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la limite des suites étant manifestement positive -

Par ailleurs, les suites (a_n) et (b_n) sont strictement monotones, d'où :

$$a_q < e < b_q$$

soit
$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q!q}$$

Ceci implique que :

$$q!q a_q < p q! < q!q a_q + 1$$

Aucun entier n'est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Cet encadrement est donc impossible, d'où la contradiction -

Exercice 12

1) Une récurrence immédiate entraîne ce résultat -

$$\begin{aligned} 2) \quad v_{m+1} - u_{m+1} &= \frac{u_m + v_m}{2} - \frac{2u_m v_m}{u_m + v_m} \\ &= \frac{(u_m + v_m)^2 - 4u_m v_m}{2(u_m + v_m)} \\ &= \frac{(u_m - v_m)^2}{2(u_m + v_m)} \end{aligned}$$

D'après 1), $u_m + v_m > 0, \forall m \in \mathbb{N}$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, v_m - u_m > 0$

$$3) \quad u_{m+1} - u_m = \frac{u_m(v_m - u_m)}{u_m + v_m} \quad \text{d'où} \quad u_{m+1} - u_m > 0$$

$$v_{m+1} - v_m = \frac{u_m - v_m}{2} \quad \text{d'où} \quad v_{m+1} - v_m < 0$$

(u_m) est donc croissante et (v_m) est décroissante, on obtient également $u_0 < u_m < v_m < v_0$

4) (u_n) est une suite croissante et majorée par v_0 .

(v_n) est une suite décroissante et minorée par u_0 .

Les deux suites sont donc convergentes.

On note l_1 la limite de (u_n) et l_2 celle de (v_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

Donc =

$$l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$\text{Donc } 2l_2 = l_1 + l_2$$

$$\text{Soit } l_1 = l_2 = l$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes -

$$5) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n$$

donc, par récurrence,

$$u_n v_n = u_0 v_0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l^2$$

$$\text{Donc } l^2 = u_0 v_0$$

$$l \geq 0 \text{ donc } l = \sqrt{u_0 v_0}$$

Exercice 13

$$\text{Ici, } f(x) = x^2 + 0,1875$$

Par récurrence, on obtient facilement que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0,1875$$

Il suffit donc d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = 2x$$

Ainsi, $f'(x)$ est positif donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

